清华数学人重聚会议
共形场论的 Segal 公理化

谢雨潇

巴黎萨克雷大学

2025 年 7 月 1 日

共形场论

共形场论即共形不变的量子场论。

共形场论

共形场论即共形不变的量子场论。

一个**二维欧式共形场论**包含以下结构：

- **时空**（Riemann 曲面）、**态**（向量）、**场**（依赖于时空点的算子）
- **态场对应**：有从态空间到场空间的单射

$$|\sigma\rangle \mapsto V_\sigma(z)$$

- **相关函数**：对态 σ_j 与时空点 z_j $(j = 1, \ldots, N)$，有量

$$\left\langle \prod_{j=1}^{N} V_{\sigma_j}(z_j) \right\rangle := \langle\Omega| \prod_{j=1}^{N} V_{\sigma_j}(z_j) |\Omega\rangle \in \mathbb{C}$$

其中 $|\Omega\rangle$ 为真空态。

共形场论

- **Virasoro 代数**：态空间有对称代数，其生成元 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n-1)n(n+1)\delta_{n+m,0}$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 称为该理论的**中心荷**。

- **Virasoro 代数**：态空间有对称代数，其生成元 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n-1)n(n+1)\delta_{n+m,0}$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 称为该理论的**中心荷**。假设 L_0 的谱有下界，

$$L_{-1}V_\sigma(z) := V_{L_{-1}\sigma}(z) = \partial_z V_\sigma(z)$$

共形场论

- **Virasoro 代数**：态空间有对称代数，其生成元 $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n-1)n(n+1)\delta_{n+m,0}$$

其中 $c \in \mathbb{C}$ 称为该理论的**中心荷**。假设 L_0 的谱有下界，

$$L_{-1}V_\sigma(z) := V_{L_{-1}\sigma}(z) = \partial_z V_\sigma(z)$$

- **算子积展开**：当 z_1 接近 z_2 时，在 z_2 处有展开

$$V_{\sigma_1}(z_1)V_{\sigma_2}(z_2) = \sum_\sigma C^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2}(z_1,z_2)V_\sigma(z_2)$$

其中 $C^\sigma_{\sigma_1,\sigma_2}$ 是亚纯函数。

代数刻画

共形场论的代数结构启发了**顶点算子代数**的概念：

1.3.1. Definition. A *vertex algebra* is a collection of data:

- (*space of states*) a $\mathbb{Z}_+$–graded vector space
$$V = \bigoplus_{m=0}^{\infty} V_m.$$
with $\dim V_m < \infty$;
- (*vacuum vector*) a vector $|0\rangle \in V_0$;
- (*translation operator*) a linear operator $T : V \to V$ of degree one;
- (*vertex operators*) a linear operation
$$Y(\cdot, z) : V \to \operatorname{End} V[[z^{\pm 1}]]$$
taking each $A \in V_m$ to a field
$$Y(A, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_{(n)} z^{-n-1}$$
of conformal dimension m (i.e., $\deg A_{(n)} = -n + m - 1$).

路径积分

给定：

- **时空**：曲面 Σ
- **场**：纤维丛 $\mathcal{E} \to \Sigma$ 的截面 $\phi : \Sigma \to \mathcal{E}$
- **Lagrange 量**：泛函 $S : \Gamma(\Sigma, \mathcal{E}) \to \mathbb{C}$
- **可观测量**：泛函 $F : \Gamma(\Sigma, \mathcal{E}) \to \mathbb{C}$

考虑**路径积分**：

$$\langle F \rangle := \int_{\Gamma(\Sigma,\mathcal{E})} F(\phi)\, e^{-S(\phi)}\, \mathrm{D}\phi$$

这提供了另一种理解相关函数的方式。

例：Liouville 共形场论

- **时空**：闭 Riemann 曲面 (Σ, g)
- **场**：映射 $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$（即 $\mathcal{E}$ 为平凡丛 $\Sigma \times \mathbb{R} \to \Sigma$）
- **Lagrange 量：Liouville 泛函**

$$S(\phi) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left(|d\phi|_g^2 + QK_g\phi + 4\pi\mu e^{\gamma\phi} \right) \mathrm{d}v_g$$

其中 $\gamma > 0$，$Q = \gamma/2 + 2/\gamma$，$\mu > 0$，K_g 为数量曲率。

- **可观测量**：

$$F(\phi) = \prod_{j=1}^{N} e^{\alpha_j \phi(z_j)}$$

其中 $\alpha_j \in \mathbb{C}$，$z_j \in \Sigma$。

Segal 公理

想法：将曲面切成小块。

$$\int_{\varphi:\mathcal{C}\to\mathbb{R}} \left(\int_{\substack{\phi_1:\Sigma_1\to\mathbb{R} \\ \phi_1|_{\mathcal{C}}=\varphi}} F_1(\phi_1)\, e^{-S_{\Sigma_1}(\phi_1)}\, \mathrm{D}\phi_1 \right) \left(\int_{\substack{\phi_2:\Sigma_2\to\mathbb{R} \\ \phi_2|_{\mathcal{C}}=\varphi}} F_2(\phi_2)\, e^{-S_{\Sigma_2}(\phi_2)}\, \mathrm{D}\phi_2 \right) \mathrm{D}\varphi$$

$$= \int_{\phi:\Sigma\to\mathbb{R}} F_1(\phi|_{\Sigma_1})\, F_2(\phi|_{\Sigma_2})\, e^{-S_\Sigma(\phi)}\, \mathrm{D}\phi$$

Segal 公理

带 Dirichlet 边界条件的路径积分

$$\mathcal{A}_\Sigma(F, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+n}) = \int_{\substack{\phi:\Sigma\to\mathbb{R} \\ \phi|_{\mathcal{C}_j}=\varphi_j}} F(\phi)\, e^{-S_\Sigma(\phi)}\, \mathrm{D}\phi$$

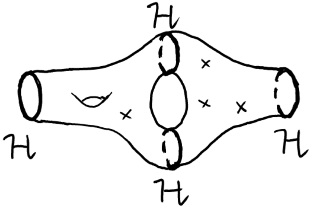
定义了**幅算子** $\mathcal{A}_\Sigma(F) : \mathcal{H}^{\otimes m} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$，其中 $\mathcal{H} := L^2(S^1 \to \mathbb{R})$。

Segal 公理

带 Dirichlet 边界条件的路径积分

$$\mathcal{A}_\Sigma(F, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+n}) = \int_{\substack{\phi:\Sigma\to\mathbb{R} \\ \phi|_{\mathcal{C}_j}=\varphi_j}} F(\phi)\, e^{-S_\Sigma(\phi)}\, \mathrm{D}\phi$$

定义了**幅算子** $\mathcal{A}_\Sigma(F) : \mathcal{H}^{\otimes m} \to \mathcal{H}^{\otimes n}$ ，其中 $\mathcal{H} := L^2(S^1 \to \mathbb{R})$ 。



粘曲面对应复合算子。

共形不变性即幅算子 $\mathcal{A}_\Sigma$ 仅依赖于 Σ 的共形结构。

确切地说，对 $\omega \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ 使得 $\omega|_{\partial\Sigma} = 0$，有

$$\mathcal{A}_{\Sigma, e^\omega g} = \mathcal{A}_{\Sigma, g} \exp\left(\frac{c}{96\pi}\int_\Sigma \left(|d\omega|_g^2 + 2K_g\omega\right) \mathrm{d}v_g\right)$$

这里的射影项称为 **Weyl 反常**。

Segal 公理

共形不变性即幅算子 $\mathcal{A}_\Sigma$ 仅依赖于 Σ 的共形结构。

确切地说，对 $\omega \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ 使得 $\omega|_{\partial\Sigma} = 0$，有

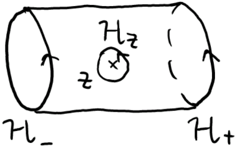
$$\mathcal{A}_{\Sigma, e^\omega g} = \mathcal{A}_{\Sigma, g} \exp\left(\frac{c}{96\pi}\int_\Sigma \left(|d\omega|_g^2 + 2K_g\omega\right) \mathrm{d}v_g\right)$$

这里的射影项称为 **Weyl 反常**。

综上，**共形场论**可定义为 Riemann 面的配边范畴到 Hilbert 空间范畴的射影函子。这启发了 Atiyah 对**拓扑量子场论**的定义。

态场对应

态空间即 $\mathcal{H}$ 。



对 $S^1 \times [0,1]$ 上的内部点 z，挖去以 z 为中心的小圆盘，考虑其幅算子

$$\mathcal{H}_z \otimes \mathcal{H}_- \to \mathcal{H}_+$$

这等价于

$$\mathcal{H}_z \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

此即态场对应。

态场对应

对 0 处的可观测量 F（所谓**局部场**），其在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的幅算子

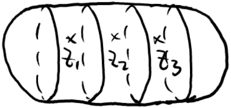
$$\mathcal{A}_{\mathbb{D}}(F) : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$$

等价于态

$$\mathcal{A}_{\mathbb{D}}(F)(1) \in \mathcal{H}$$

这也称为态场对应。特别地：

- 取 $F = 1$ 即得真空态 $|\Omega\rangle$。
- 可取 $F = V_\alpha(0) = e^{\alpha\phi(0)}$。



$$\langle\Omega| V_{\alpha_1}(z_1) V_{\alpha_2}(z_2) V_{\alpha_3}(z_3) |\Omega\rangle$$

Segal 半群

扰动共形结构的方式之一是粘圆环：

由粘公理，只需研究圆环的幅算子。

考虑复合下的半群

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}^\circ \text{ 全纯单射}, f(0) = 0\}$$

对 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$，考虑圆环 $\mathbb{A}_f := \mathbb{D} \setminus f(\mathbb{D}^\circ)$ 及其幅算子 $\mathcal{A}_f := \mathcal{A}_{\mathbb{A}_f}$，则

$$f \mapsto \mathcal{A}_f$$

给出了 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 在 $\mathcal{H}$ 上的射影表示。

设全纯向量场

$$v = -\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{n+1} \partial_z$$

满足 $\mathrm{Re}(\bar{z}v(z)) < 0$ ($z \in \partial\mathbb{D}$)。对任意 $t > 0$，其流 $e^{-tv} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 的幅算子

$$\mathbb{A}_{e^{-tv}} = Ce^{-t\mathbf{H}_v}$$

（这里 C 依赖于 t, v ）有生成元

$$\mathbf{H}_v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n L_n + \text{共轭}$$

此即 Virasoro 代数在态空间 $\mathcal{H}$ 上的作用。

Virasoro 代数

$\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ 的“Lie 代数”的生成元

$$\ell_n = -z^{n+1}\partial_z$$

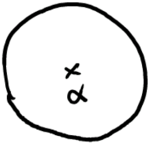
满足

$$[\ell_n, \ell_m] = (n-m)\ell_{n+m}$$

这称为 **Witt 代数**。

由于 $f \mapsto \mathcal{A}_f$ 是射影表示，它等价于 Witt 代数的中心扩张的表示，即 Virasoro 代数。

以 Liouville 共形场论为例，Virasoro 表示的最高权向量即单位圆盘上 $V_\alpha(0) = e^{\alpha\phi(0)}$ 对应的态 Φ_α：

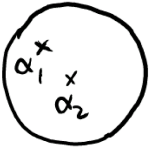


态空间有直积分分解

$$\mathcal{H} \cong \int_{Q+i\mathbb{R}_+} \mathcal{V}_\alpha \otimes \widetilde{\mathcal{V}}_\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

其中 $\mathcal{V}_\alpha$ 为 Φ_α 生成的 Verma 模。

乘积 $V_{\alpha_1}(z)V_{\alpha_2}(0)$ 对应的态为：



在直积分分解下展开即

$$V_{\alpha_1}(z)V_{\alpha_2}(0) = \sum_{\nu} \int_{Q+i\mathbb{R}_+} C_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha) V_\alpha(0)\, \mathrm{d}\alpha$$

其中求和遍历 Verma 模的基。此即算子积展开。